Clase 3: Continuidad

Nico

29 de abril de 2008

Recordemos que una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es una función f tal que, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es igual a $f(x_0)$.

La gráfica de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ describe siempre una curva continua. **ver figuras 1 y 2**

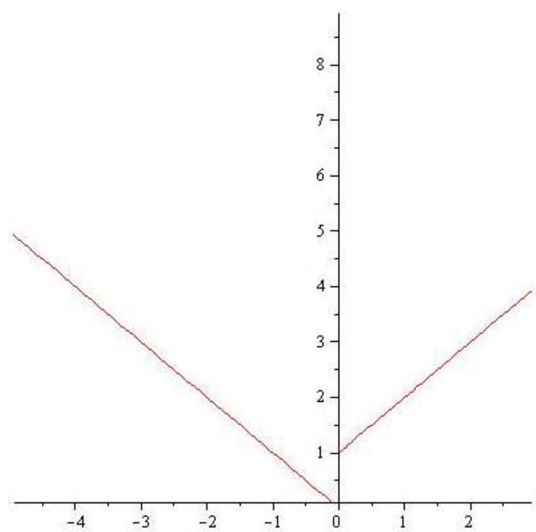

Figura 1: Función discontinua

Definición 1. *Sea* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función con dominio* A*. Sea* $x_0 \in A$*. Decimos que* f *es continua en* x_0 *si, y sólo si,* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*. Si* f *es continua en cada punto* x_0 *de* A*, decimos que* f *es continua. Si* f *no es continua en* x_0*, decimos que* f *es discontinua en* x_0*. Si* f *es discontinua en algún punto de su dominio, decimos que* f *es discontinua.*

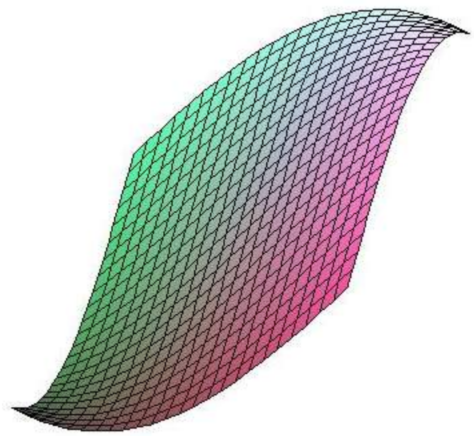

Figura 2: Función continua

Ejemplo 1. *1. La función polinómica $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ es continua.*

2. La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x+y$, es continua. En efecto,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x+y = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = x_0+y_0 = f(x_0,y_0).$$

Por lo tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

3. La función $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es discontinua en $(0,0)$. En efecto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe (ver Ejemplo 6 clase de límites (Clase anterior)).

4. La función $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en todo en $\mathbb{R}^2$. En efecto, si $(x,y) \neq (0,0)$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^2} = f(x_0,y_0).$$

Por otra parte, si $(x_0, y_0) = (0,0)$ *entonces pasando a coordenadas polares tenemos que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{(*)}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta r \operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} = \lim_{r\to 0}(\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta) r = 0 = f(0,0),$$

(*) haciendo $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$*), con lo cual* f *también es continua en* $(0,0)$*.*

1. Propiedades de las funciones continuas

Teorema 1. *Sean* $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $c\in\mathbb{R}$.

i) *Si* f *es continua en* $x_0\in A$ *entonces* cf *es continua en* x_0.

ii) *Si* f, g *son continuas en* $x_0\in A$ *entonces* $f+g$ *es continua en* x_0.

iii) *Si* f, g *son continuas en* $x_0\in A$ *y* $m=1$ *entonces* fg *es continua en* x_0.

iv) *Si* f *es continua en* $x_0\in A$ *y* f *no se anula en* x_0 *entonces* $1/f$ *es continua en* x_0.

v) *Existen funciones* $f_1, f_2, \ldots, f_m\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *tales que* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$*, para todo* $x\in A$*. Además,* f *es continua si, y sólo si,* f_i *es continua para cada* $i = 1, 2, \ldots, m$.

La prueba de estas propiedades se sigue directo de las propiedades de los límites.

Ejemplo 2. *1. Sea* $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x,y,z) = (z\operatorname{sen}x, x+y+z)$*, para cada* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*. Afirmamos que la función* f *es continua en todo* $\mathbb{R}^3$*. En efecto, tenemos que las funciones* $f_1, f_2\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *definidas por*

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= z\operatorname{sen}x, \\ f_2(x,y,z) &= x+y+z, \end{aligned}$$

ver figuras 3 y 4

para cada $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*, son continuas en todo* $\mathbb{R}^3$ *y satisfacen* $f = (f_1, f_2)$*. Entonces, usando la parte* **(v)** *del Teorema 1, concluimos que* f *es continua.*

2. Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x\geq 2 \\ 0, & x<2 \end{cases}$*. Determine si* f *es continua en:*

a) $x^2+y^2<1$

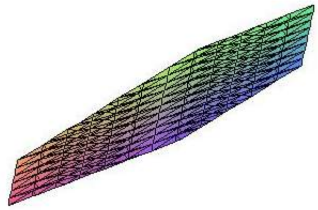

Figura 3: $x + y + z$

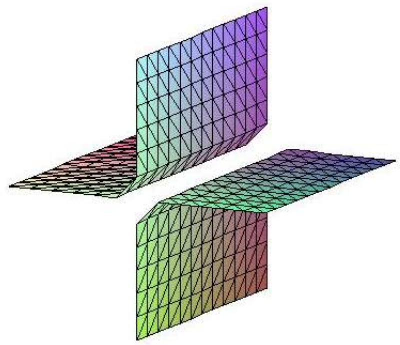

Figura 4: $z \operatorname{sen} x$

b) $x \geq 0$

ver figura 5
Solución:

a) *En* $x^2 + y^2 < 1$ $f(x,y) = 0$ *que es una función continua.*

b) *Cuando* $x \geq 0$ f *es discontinua pues el límite no existe (Límite por la izquierda* $= (x^2 + y^2)$ *es distinto al límite por la derecha* $= (0)$*)*

2. Composición de funciones

Si g aplica A en B y f aplica B en C, la **composición de** g **con** f, o de f sobre g, que se denota por $f \circ g$, aplica A en C y lleva $\mathbf{x} \to f(g(\mathbf{x}))$.

Ejemplo 3. $f(x,y) = e^{x+y}$ *es la composición de* $g(x,y) = x+y$ *con* $f(x) = e^x$. $(f \circ g)(x,y) = f(x,y) = e^{x+y}$. ***ver figura 6***

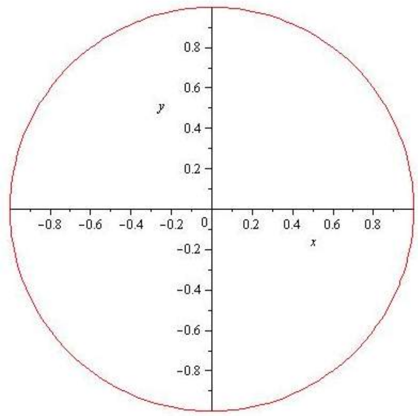

Figura 5: $x^2 + y^2 < 1$

3. Continuidad de composiciones

Teorema 2. *Sean $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f\colon B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Suponga que $g(A) \subset B$. Si g es continua en $x_0 \in A$ y f es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en x_0.*

Prueba: Si $x \to x_0$ entonces $g(x) \to g(x_0)$, ya que g es continua. Esto último implica a su vez que $f(g(x)) \to f(g(x_0))$, ya que f es continua. En suma, si $x \to x_0$ entonces $f(g(x)) \to f(g(x_0))$. $\square$

Ejemplo 4.

1. *Sea $h(x,y) = e^{\frac{x}{y+2x}}$. Determine el conjunto de continuidad.*
   $f(x) = e^x$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua en todo $\mathbb{R}$. $g(x,y) = \dfrac{x}{y+2x}$ es continua en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) | y = -2x\}$. Entonces, $h(x,y) = (f \circ g)(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 \backslash \{y = -2x\}$.

2. *$F(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2+y^2}{5x^4+y^4+2}\right)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.*
   $F(x,y) = (f \circ g)(x,y)$ $g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{5x^4+y^4+2}$, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$.

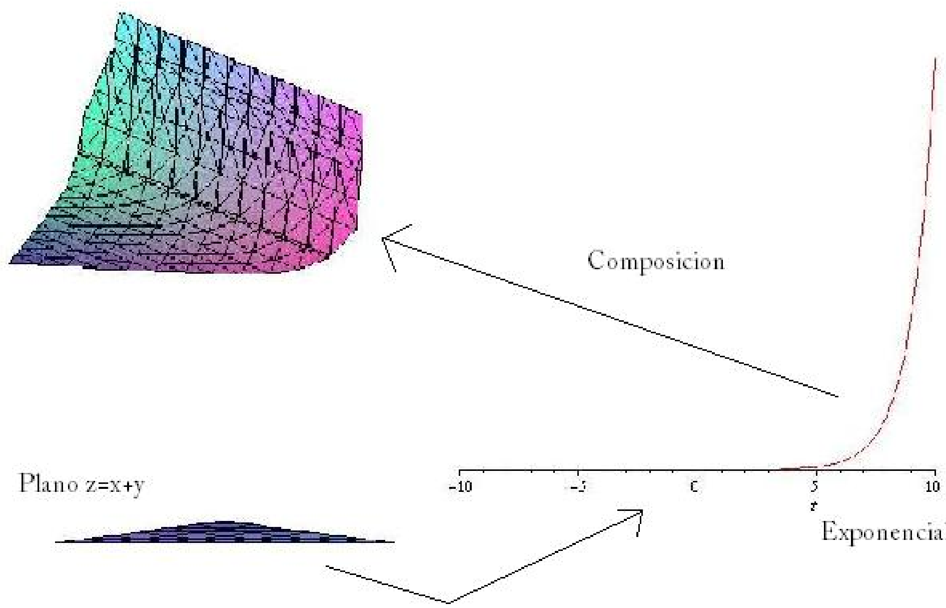

Figura 6: Composición de funciones